Craveri, Ana M.
Cignacco, Gloria
Spengler, María del Carmen
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística Universidad Nacional de Rosario.

UNA FORMA DE CONSTRUIR EL CONCEPTO DE PROCESO ESTOCÁSTICO A PARTIR DE CONOCIMIENTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

RESUMEN

El trabajo presenta una forma de introducción al estudio de los procesos estocásticos en el contexto de una clase dirigida a estudiantes de Estadística Básica en Carreras donde esta disciplina tiene un carácter instrumental. Se espera que esta propuesta promueva la construcción de aprendizajes significativos referidos a procesos estocásticos a partir de conceptos básicos de probabilidad y distribuciones de probabilidad de variables aleatorias. Queda abierta en prospectiva la elaboración de materiales didácticos a partir de esta idea y su evaluación en el marco del Proyecto de investigación: La Selección, Análisis, Producción y Evaluación de Material Didáctico para la Matemática Básica Universitaria en Carreras Profesionales, dirigido por la Dra. Mercedes Anido y que integra a los autores de esta presentación.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los Procesos Estocásticos está ubicado tradicionalmente entre los últimos capítulos a desarrollar en un curso de Estadística Básica. Requiere que el alumno domine los conceptos de: probabilidad, variables aleatorias y modelos probabilísticos, entre otros así como también las herramientas de análisis matemático multivariado.

El planteo del problema es:

¿cómo introducir un tema complejo de Estadística en un curso de Estadística Básica en Carreras donde esta disciplina tiene un carácter instrumental?

¿cómo impacta esta forma de abordaje del tema como elemento motivador para la prosecución del estudio de procesos estocásticos complejos?

Existen numerosos problemas vinculados al estudio de fenómenos en los que una o más características aleatorias fluctúan a lo largo del tiempo, por ejemplo:

- en el análisis de un sistema informático la carga del sistema, los tiempos de espera y los tiempos de respuesta fluctúan a lo largo del día
- en un proceso industrial continuo tanto los parámetros del proceso (temperatura, presiones, caudales....) como las características de calidad del producto obtenido (densidad, índice de fluidez,,,,) fluctúan a lo largo del proceso de producción

- en una compañía eléctrica la demanda de potencia fluctúa a lo largo de las horas del día (y a lo largo de los días de la semana)
- en una población en la que se está propagando una enfermedad infecciosa el porcentaje de individuos en cada uno de los estados posibles (sanos, portadores latentes e infectados) fluctúan a lo largo del tiempo.

El análisis de este tipo de fenómenos aleatorios, exige de modelos especiales debido a la existencia de relaciones temporales que ligan los valores de una variable en el instante t con sus valores pasados, así como también con los valores pasados o actuales de las otras variables. Los Procesos Estocásticos son el modelo estadístico básico para el análisis de problemas como los mencionados, constituyendo en consecuencia la herramienta fundamental para el tratamiento de variables aleatorias que fluctúan en el tiempo.

Nuestra propuesta de abordaje del tema intenta dar una respuesta al problema planteado desde la perspectiva de la Educación Matemática como Ciencia de Diseño. (Wittmann, 1995).

MARCO TEÓRICO

En un sentido amplio, desde esta posición, se considera posible la construcción de unidades esenciales en temas importantes en la formación del alumno, tanto como objetos en si mismos como por su carácter de herramientas para la comprensión de otros tópicos, y la investigación sobre su funcionamiento.

De esta manera se espera obtener conocimientos sobre las concepciones, aptitudes de los alumnos y los obstáculos y dificultades que intervienen en el aprendizaje, analizar las prácticas de enseñanza usuales y aportar estrategias de mejoramiento en la forma de Ingenierías Didácticas, que al jugar sobre el espacio de las restricciones reales o supuestas del sistema, deben permitir un funcionamiento mas adecuado de la enseñanza (Artigue y otros 1999).

En la realidad la calidad de esas construcciones dependerá de la estrategia constructiva de base, del ingenio de los diseñadores y de la evaluación sistemática, tópicos todos, de una ciencia de diseño (Wittmann, 1995).

En opinión de este autor, los resultados más importantes de investigación en Educación Matemática son conjuntos de estudios cuidadosamente diseñados y empíricamente estudiados de unidades de enseñanza que están basadas en principios teóricos fundamentales. De esto se sigue que estas unidades deberían formar parte del entrenamiento profesional de docentes. Wittman refuerza la teoría afirmando que el diseño de unidades de enseñanza e investigación empírica, centrado alrededor de ellas, sólo puede ser exitoso con un sistema de Educación Matemática que consista en las áreas relativas expuestas y en la interacción de estos componentes.

La denominación de Ingeniería Didáctica surge de una forma de trabajo didáctico equiparable al trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico (Artigue y otros, 1999).

Al respecto, histórica y tradicionalmente ha sido tarea de las escuelas de ingeniería enseñar sobre cosas artificiales, como hacer artefactos que tengan propiedades deseadas y como enseñarlas. El diseño para la construcción, es el corazón de entrenamiento profesional y la principal marca que distingue las profesiones de las ciencias (Wittmann,.1995).

En la opinión de Wittmann, la responsabilidad profesional se asume completamente sólo, en cuanto los que la ejercen, puedan descubrir un sólido cuerpo intelectual parcialmente formalizable, parcialmente empírico y transmisible. Según el mismo autor, el marco de una ciencia de diseño abre a la Educación Matemática una prometedora perspectiva para el completo cumplimiento de sus objetivos.

OBJETIVO

- Aportar una forma de ingresar al estudio de los Procesos Estocásticos
- Diseñar un material curricular adecuado

DESARROLLO

Algunos problemas que tratan los procesos estocásticos o aleatorios

1. Sea un grupo de n máquinas (sistema) confiadas a un operario que tiene por misión repararlas a medida que se descomponen. La duración de marcha sin interrupción de una máquina es aleatoria y también lo es la duración de la reparación. Conociendo estas leyes de probabilidad, ¿cuántas máquinas se pueden asignar a un operario para minimizar el costo de reparación?

   Convenimos en definir en todo instante t el estado de este sistema como la partición de las máquinas en dos clases: en servicio, en reparación y en espera de reparación.

2. Sean camiones y barcos (Sistema) que aseguran el abastecimiento de una fábrica que debe funcionar sin interrupciones. Estos vehículos, recorren una gran distancia de modo que no se conocen exactamente las fechas de llegadas, estas son aleatorias y se conoce la ley de probabilidad. Para controlar estas diferencias en las llegadas se constituye un stock regulador. ¿Cuál debe ser el volumen de stock tal que no se produzcan dos posibles faltantes?. Si no tiene stock la usina debe parar, si el stock está completo los vehículos deben esperar antes de descargar Si el volumen previsto es muy grande hay pocos faltantes pero es costoso su mantenimiento en depósito Si el volumen es reducido cuesta poco el mantenimiento pero los faltantes son frecuentes: un óptimo debe ser encontrado.

   El estado del sistema está caracterizado por la cantidad de materia prima que se encuentra en stock en el instante (t).

3. Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones (sistema) para determinar la dimensión óptima de una brigada. El muelle tiene espacio sólo para un camión. La llegada de los camiones es aleatoria y las salidas también. El tiempo se servicio es una variable aleatoria que corresponde al tiempo entre dos salidas sucesivas.

En este caso el estado del sistema es 'ocupado' o 'no ocupado'

Estos tres ejemplos alcanzan para dar una idea de la multitud de problemas similares que pueden darse. La resolución de estos problemas comprende dos etapas distintas:

1) La búsqueda de una ley de probabilidad del sistema
2) Búsqueda o investigación del óptimo económico

   Como vemos estos sistema pueden tomar varios 'estados' y las duraciones de estos estados es aleatoria. Para describir matemáticamente el sistema hay que determinar estas leyes de probabilidad.

   El tema de la búsqueda del óptimo económico no nos ocupará por el momento

   ¿Cómo se hará el abordaje de este tema?

A partir de la idea de generar la distribución de Poisson no simplemente como una aproximación a la distribución Binomial, sino directamente a partir de un modelo simple y muy conocido de comportamiento estocástico que se refiere a sucesos distribuidos al azar en el tiempo (o en el espacio), puesto que Poisson proporciona un modelo matemático para el estudio de los cambios de estado de un sistema a través del tiempo.

Esto hace necesario que en este momento se introduzca la noción de "Proceso estocástico".

Proceso Estocástico

Hemos estudiado funciones de probabilidad de una variable aleatoria, funciones de probabilidad de dos variables aleatorias (Regresión y Correlación), generalizando podemos pensar en funciones de probabilidad de n variables aleatorias.

Pensemos ahora que una secuencia: X_1, X_2------- de variables aleatorias puede también ser tratada como una 'familia de variables aleatorias' X y sus realizaciones son las secuencias (x_1,x_2…). Cuando esta familia de variables aleatorias fluctúa en el tiempo (sus realizaciones son funciones de una variable real t) constituyen los llamados procesos estocásticos. Así por ejemplo:

- El número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador durante el intervalo de tiempo (0,t), para un t fijado, es una variable aleatoria, pero el número de llamadas considerado como una función de t, esto es como una función de la variable t donde t toma valores en un intervalo, es una función aleatoria.
- Análogamente, el consumo de energía eléctrica en un momento y lugar fijados, es una variable aleatoria, pero este consumo considerado a lo largo de un intervalo de tiempo, como función del tiempo, es una función aleatoria.

En general simbolizamos un proceso estocástico con:

$\{X_t , t \varepsilon I\}$ I C R

Observación: Habitualmente el parámetro t es interpretado cono tiempo, pero puede ser también longitud, superficie, etc.

En este momento nos limitaremos al proceso de Poisson.

Proceso de Poisson. Condiciones que debe cumplir el proceso

Primera condición: Debe ser un proceso estocástico a *incrementos independientes*, es decir que los sucesos están distribuidos individualmente al azar sobre el intervalo t.

En el proceso poissoniano cada aparición es una señal o punto (proceso a señales) cada vez que aparece un valor de X_t es una señal o punto del eje t.

Quiere decir que el número de señales en intervalos de tiempo disjuntos deben ser variables aleatorias independientes.

Segunda condición: Que el proceso estocástico sea a *incrementos homogéneos* es decir que las señales o puntos están distribuidos *colectivamente* al azar. Con ello queremos expresar, que la probabilidad de que se presente un número determinado de señales va a ser la misma, para intervalos de tiempo de igual longitud.

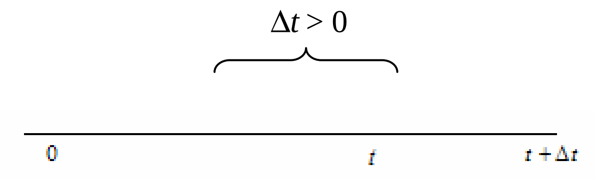
Tercera condición: debe asegurarse que los suceso (señales) se presenten en forma repentina ó instantánea en intervalos cortos de tiempo pero siempre en forma individual o sea no formando pares o grupos. Esto lo expresamos en dos subcondiciones:

a) Vamos a exigir que la probabilidad de tener una señal en el intervalo pequeño de tiempo de longitud t sea directamente proporcional a la longitud del intervalo.
b) La probabilidad de tener más de una señal durante el intervalo de tiempo t es ε(t) (es decir tiende a cero cuando $t \to 0$)

Sea un proceso estocástico definido por $\{X_t; 0 \le t \le \infty\}$. Si este proceso verifica las condiciones: primera, segunda y tercera (a y b) y además se cumple que $P(X_0 = 0) = 1$ (es decir la probabilidad de tener 0 punto en el intervalo 0 es 1) este proceso es un proceso homogéneo discreto de Poisson y responde a la siguiente función de probabilidad:

$$P(X_t = i) = P_i(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \qquad \begin{array}{l}(i = 0,1,2...)\\(\lambda > 0)\end{array}$$

Demostración: La probabilidad de tener i puntos en el intervalo de tiempo ampliado (t+Δt), se puede pensar, por ser un proceso a incrementos homogéneos e independientes (es decir cumpliéndose las condiciones primera y segunda) en la siguiente forma:



$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t).P_0(\Delta t)$$

$$P_i(t+\Delta t) = P_i(t).P_0(\Delta t) + P_{i-1}(t).P_1(\Delta t) + P_{i-2}(t).P_2(\Delta t) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + P_0(t).P_i(\Delta t) = \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(t) - P_k(\Delta t)$$

Escribiremos $P_0(\Delta t)$ y $P_1(\Delta t)$ en otra forma

$$P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)$$

Pr (no tener más de una señal en Δt)=$1 - P_0(\Delta t) - P_1(\Delta t) \; = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta t) = \varepsilon(\Delta t)$

Donde $\varepsilon(\Delta t)$ es un infinitésimo de orden superior a Δt

De donde:

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - \varepsilon(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - \underbrace{[\varepsilon(\Delta t) + \varepsilon(\Delta t)]}_{\varepsilon\Delta t}$$

Luego $P_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + \varepsilon(\Delta t)$

La demostración la haremos primero para $i = 0$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)[1 - \lambda\Delta t - \varepsilon(\Delta t)]$$

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda P_0(t)\Delta t + P_0(t)\varepsilon(\Delta t)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) + P_0(t).\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}$$

Aplicando límite para $\Delta t \to 0$, tendremos:

$$P_0^{'}(t) = -\lambda P_0(t)$$

Una ecuación diferencial lineal de primer orden, a partir de la cual, resolviéndola, obtendremos nuestra incógnita $P_0(t)$:

$$\frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)} = -\lambda$$

$$\frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)} dt = -\lambda \int dt$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + C$$

Luego: $P_0(t) = e^{-\lambda_0 + C} = 1$ luego C=0

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Veremos que pasa para $i = 1, 2 \ldots$

Volviendo a la primera identidad

$$P_i(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{i}P_{i-k}(t)P_k(\Delta t)=P_i(t)[1-\lambda\Delta t+\varepsilon(\Delta t)]+P_{i-1}(t)[\lambda\Delta t+\varepsilon(\Delta t)]+\varepsilon^{'}(\Delta t)$$

En donde $\varepsilon^{'}(\Delta t)$ Es un infinitésimo de orden superior a los infinitésimos de los términos anteriores:

$$P_i(t+\Delta t)-P_i(t)=-\lambda P_i(t)+P_{i-1}(t)\lambda+\frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}\sum_{k=0}^{i}P_k(t)$$

$$P_i^{'}(t)+\lambda P_{i-1}(t) \qquad (i=1,\,2\,\ldots)$$

Resulta así un sistema recurrente de ecuaciones de diferenciales lineales, de primer orden a coeficientes constantes.

$$P_i^{'}(t)+\lambda P_i(t)-\lambda P_{i-1}(t)=0$$

Para resolver esta ecuación diferencial hagamos:

$$P_i(t)=u(t).v(t) \qquad (1)$$

Donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones de t desconocidas, donde una de ellas se elegirá en alguna forma que cumpla una restricción:

$$u^{'}(t).v(t)+v^{'}(t).u(t)-\lambda u(t).v(t)-\lambda P_{i-1}(t)=0$$

$$v[u^{'}+\lambda u]+v^{'}u-\lambda P_{i-1}(t)=0 \qquad (2)$$

Elegiremos a u de tal forma que $u^{'}+\lambda u=0$

$$u^{'}=-\lambda u$$

$$\frac{u^{'}}{u}dt=-\lambda dt$$

$$\int_0^t\frac{u^{'}}{u}dt=-\lambda\int_0^t dt$$

$$\therefore \quad u=e^{-\lambda t}$$

Reemplazando en (2)

$$v^{'}e^{-\lambda t}-\lambda P_{i-1}(t)=0$$

$$v^{'}=\lambda P_{i-1}(t).e^{\lambda t}$$

$$\int_0^t v^{'}dt=\lambda\int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t}dt$$

Volviendo a (1)

$$P_i(t)=e^{-\lambda t}.\lambda\int_0^t P_{i-1}(t).e^{\lambda t}dt \qquad i=1,\,2,\,\ldots$$

La solución es de recurrencia, luego trabajándola, tendremos:

$$P_1(t)=e^{-\lambda t}\lambda\int_0^t P_0(t).e^{\lambda t}dt=e^{\lambda t}\lambda\int_0^t e^{-\lambda t}.e^{\lambda t}dt=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}$$

Generalizando, llegamos a que:

$$P_i(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Siendo λ el número medio de señales o puntos en el intervalo unidad, que podemos definir también como *intensidad del proceso.*

CONCLUSIONES

Entendemos que a través de esta presentación se responde al primero de los interrogantes planteados, en lo que hace a la introducción en forma sencilla y asequible al alumno de un tema que, en general, en la bibliografía específica requiere de un mayor dominio de la Teoría de las Probabilidades.

Se espera, además, que el material didáctico que estamos presentando se muestre como un disparador hacia la generación de acciones y estrategias educativas. La expectativa está centrada en que su contenido se muestre como una herramienta creativa, de utilidad para la construcción de estrategias didácticas.

Se impone la necesidad de ampliar el material didáctico sobre los Procesos Estocásticos e instrumentar la evaluación, tanto de los materiales didácticos como de los aprendizajes, con vista a mejorar la construcción de este concepto, actividades que están contempladas en los objetivos del Proyecto del que somos parte todos los autores de esta presentación.

BIBLIOGRAFÍA

-ARTIGUE, M.; DOUDAY, R.; MORENO, I. (1999): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano. 34-56.

-WITTMANN, E. (1995) Mathematics Education as a Desing Science. *Educational Studies in Mathematics,* 29, 355-374.